# Método de Solución al Problema de Ruteo e Inventarios de Múltiples Productos para una Flota Heterogénea de Naves

Ricardo Giesen, Juan Carlos Muñoz
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística
Pontificia Universidad Católica de Chile
Vicuña Mackenna 4860, Macul, Casilla 306, Correo 22
Fax: +56-2-354-0281, E-mail: Giesen@ing.puc.cl; jcm@ing.puc.cl

Mariela Silva, Mabel Leva
Grupo de Logística
División de Ingeniería de Transporte DICTUC S.A.
E-mail: msilva@ing.puc.cl ; mleva@ing.puc.cl

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un problema operacional de ruteo e inventarios de múltiples productos para una flota heterogénea de naves y un método heurístico de solución para resolverlo. En este sistema de distribución se debe transportar múltiples productos desde distintos puertos de producción a un conjunto de puertos donde se consumen. El método desarrollado permite determinar la asignación de una flota de naves a rutas, y estanques a productos, de modo de satisfacer la demanda por múltiples productos en los distintos terminales de un sistema de distribución. La heurística desarrollada permite encontrar soluciones eficaces para problemas de tamaño real, en términos de velocidad computacional y calidad de las soluciones, y respetando niveles de inventario objetivo en cada terminal, restricciones de acceso a terminales (calado, eslora), y restricciones de estiba de las naves relacionadas a compatibilidad de productos en estanques contiguos y/o que comparten segregación.

*Palabras clave*: Programación y ruteo de naves; Problema de ruteo e inventarios; Problema de Ruteo de Vehículos.

## ABSTRACT

In this paper an operational maritime inventory routing problem with multiple products and a heterogeneous fleet of vessels is addressed. In the distribution system considered, the fleet needs to transport multiple products from a set of production terminals to a set of demand terminals. The developed method allows obtaining the assignment of vessels to routes, and the assignment of compartments to products on each vessel for multiple products, such that demand of each product at different terminals in the system is satisfied. The developed heuristic method allows obtaining effective solutions for real size instances, in terms of computation time, quality of solutions, satisfying inventory targets at each facility, access constraints to each terminal, and product compatibility in different vessel compartments.

*Keywords*: Ship routing and scheduling; Inventory Routing Problem; Vehicle Routing Problem.

## 1. INTRODUCCIÓN

El transporte de carga por vía marítima representa aproximadamente el 90% del volumen total, equivalente al 70% del valor de todos los bienes transportados en la economía mundial (Psaraftis, 1999). El transporte marítimo ofrece el menor costo por tonelada-Km. en el caso de graneles, y los graneles representan aproximadamente el 80% de las tonelada-Km. transportadas por vía marítima. Por lo tanto, una mejora incluso marginal en la eficiencia de las operaciones de transporte marítimo de carga puede tener un importante efecto económico, reduciendo el costo de los insumos productivos y productos consumidos en el área de influencia de la red de distribución.

En este trabajo se presenta un problema real de planificación operacional de rutas navieras, en el que se combina el control de inventarios para múltiples productos y el problema de ruteo de naves. En este sistema de transporte naviero, una flota heterogénea de barcos debe transportar múltiples productos desde un conjunto de puertos, donde se ubican puntos de producción, por ejemplo refinerías, a un conjunto de puertos en los que se ubican los consumos de distintos clientes, por ejemplo estanques. En este sistema el distribuidor y sus clientes operan bajo contratos del tipo *vendor managed inventory* (VMI) en los que el distribuidor toma control de los inventario de cada uno, asegurándole que se mantendrán niveles adecuados de inventarios. En este esquema, el distribuidor puede coordinar de mejor forma la distribución de producto, por ejemplo, pudiendo adelantar la visita de un determinado cliente para coordinar dicha visita con la de otro cliente cercano. De esta forma, el distribuidor debe determinar las rutas de sus naves y el *mix* de productos a transportar en cada tramo, es decir, debe determinar la secuencia de puertos a visitar por cada nave, las cantidades a cargar o descargar en cada puerto, y la asignación de productos a compartimentos de cada nave respetando restricciones de seguridad en el uso de estanques al interior de una nave y de calado en cada puerto visitado, de forma de mantener niveles adecuados de servicio para cada cliente. Christiansen et al. (2004) presenta una revisión detallada de las investigaciones previas en ruteo y programación de naves. Más recientemente, Hwang (2005) presenta una formulación de programación entera mixta (MIP) para el problema de ruteo e inventarios marítimo con múltiples productos (MIRP) en la que se incluyen compartimentos dedicados, y Christiansen et al. (2006) presentó un trabajo en desarrollo sobre heurísticas para problemas de ruteo e inventarios con múltiples productos (MIRP).

El problema estudiado en este trabajo considera un sistema con diversos graneles líquidos que deben ser transportados por una flota heterogénea de naves con múltiples compartimentos. Este problema se diferencia de investigaciones anteriores en la literatura en que considera dos subconjuntos de productos - limpios y sucios- y varias restricciones respecto a compatibilidad en el tipo productos que viajan en la misma segregación y en estanques contiguos. Además, las rutas de las naves deben respetar las profundidades navegables máximas en cada puerto, por lo que, se debe incluir una restricción adicional en el problema de ruteo, ya que el calado de cada nave es una función del peso de la carga transportada.

El presente trabajo se ha dividido en seis partes. Luego de esta introducción, en la sección 2 se presenta el enfoque de solución propuesto, especificando como se descompone el problema planteado. Posteriormente, se presenta una descripción detallada de cada una de las tres etapas del enfoque de solución propuesto. En la sección 3, se presenta la heurística utilizada para encontrar soluciones iniciales factibles. En la sección 4, se presenta la Etapa II del método propuesto, en el que secuencialmente se optimiza las rutas de cada nave, manteniendo fijo el programa de las restantes naves y relajando restricciones de uso de estanques. En la sección 5, se describe la Etapa III del método en el que se resuelve el problema propuesto considerando como fijas las rutas obtenidas en la Etapa II. Finalmente, se presentan conclusiones, realizando un análisis de los principales aportes del trabajo y temas que requieren investigación adicional.

## 2. ENFOQUE DE SOLUCIÓN PROPUESTO AL MIRP

Para tratar este problema de ruteo e inventarios con múltiples productos (MIRP), las tasas de consumo y producción por producto se asumen fijas en cada terminal durante el horizonte de planificación, y se utiliza un enfoque de descomposición en dos etapas. Primero, se establece el número de visitas requeridas en cada puerto y las ventanas de tiempo asociadas a cada una de ellas. En la segunda etapa, se formula un problema de programación entera mixta (MIP) que permite determinar la ruta y programación de naves, así como la asignación de productos a los compartimentos de cada nave. En este problema, la función objetivo a minimizar corresponde a la suma de costos totales de transporte, costos de carga y descarga, cobros por recalada y servicio a la nave en cada puerto, penalidades por quiebres de inventario y violaciones de niveles de inventario de seguridad en el horizonte de planificación y al final del horizonte de planificación. Puesto que el MIP propuesto no puede resolverse en un tiempo razonable, en este trabajo se desarrolló una heurística en la que el problema se descompone en las siguientes tres etapas:

i) en la primera etapa, se utiliza una heurística de tipo constructivo en la que se aplica reglas *greedy* para obtener una solución inicial factible. Para tal efecto, se considera sólo un subconjunto de rutas predefinidas. Estas son secuencias que comienzan en un puerto donde se produce y visitan una secuencia de terminales de consumo. En cada paso, considerando solamente las visitas ya programadas a cada terminal, se selecciona el terminal que más pronto sufriría un quiebre de inventario de no programarse nuevas visitas a éste. Luego, todas las combinaciones de las rutas y naves factibles que visitan dicho terminal son evaluadas, y se escoge la de mínimo costo. La asignación de productos a transportar se obtiene de forma tal que el siguiente quiebre de inventario es retrasado lo más posible. Este proceso se repite iterativamente hasta construir un plan para todo el horizonte de planificación.

ii) en la segunda etapa, se utiliza un procedimiento secuencial en el que se optimiza la programación de una nave a la vez, manteniendo la programación de las restantes naves fijas, sin considerar restricciones de compartimentos. En esta segunda etapa, dado el conjunto de rutas factibles obtenidas en la primera etapa, se seleccionan las naves de a una y se re-optimizan sus rutas. En esta re-optimización se utiliza una versión relajada del MIP desarrollado, donde no se considera restricciones de compatibilidad entre productos y compartimentos, y las rutas de las restantes naves no se modifican. Este proceso se repite iterativamente hasta que se han re-optimizado las rutas de todas las naves.

iii) en la tercera etapa, a partir del conjunto de rutas obtenidas en (ii), se optimiza la asignación de productos considerando todas las restricciones en la asignación de producto-compartimiento. Es decir, en la tercera etapa, fijando las rutas obtenidas para cada nave en la etapa anterior, se optimizan las cantidades a cargar y descargar en cada parada en cada compartimiento considerando todas las restricciones de compatibilidad de productos.

## 3. ETAPA I: HEURÍSTICA DE BÚSQUEDA DE SOLUCIÓN INICIAL

La heurística propuesta trata de replicar la forma en que manualmente se podría realizar la planificación mensual. Para acotar el espacio de búsqueda, se predefine un subconjunto de rutas a priori, privilegiando naves más económicas para terminales con mayor movimiento. Cada ruta predefinida corresponde a una secuencia de visitas para una nave desde un terminal de oferta a uno o más terminales de demanda. Así, la planificación completa para una nave consta de una o más de esas secuencias. Inicialmente se consideran todas las combinaciones posibles de terminales y productos. En cada iteración de la heurística si el stock de un producto en algún terminal no puede ser aumentado, esa combinación es descartada. Como resultado de la heurística se obtienen rutas para cada nave, además de cantidad de cada producto (des)cargada para cada nave en cada terminal. Sin embargo, la solución en término de cantidades (des)cargadas no necesariamente respeta las restricciones de estiba de cada nave, ya que dichas restricciones son sólo incluidas en la Etapa III.

```
While Nodos ≠ φ
    buscar (T, P) ∈ Nodos, que produce primer quiebre de stock
    For each (N,R) tal que nave N realizando ruta R puede llegar a T
        Nodos' = {(T',P') ∈ Nodos | T' esta dentro de la ruta R}
        While Nodos' ≠ φ
            Buscar (T',P') ∈ Nodos' que produce primer quiebre de stock
            Min0 = cantidad máxima de P' que se puede descargar en T' el
            dia de quiebre de stock
            If es posible cargar Min0 en un solo estanque de N
                Escoger menor estanque E que puede cargar Min0
                Min = min0
            Else
                Escoger E mas desocupado que se pueda cargar con P'
                Min = Espacio libre en E
            End
            If Min > 0
                Llenar estanque E con Min m³ de producto P'
            Else
                Nodos' = Nodos' – (T',P')
            End
        End
        If N puede llegar a T antes que se quiebre el stock de P
            Ajustar tiempo de partida de N de manera que llegue a T el día en
            que se quiebra el stock
        End
        Calcular costo planificación al agregar R a Rutas(N)
    End
    Escoger (Nmin,Rmin) que minimiza el costo de la planificación
    If se encontro un (Nmin,Rmin)
        Anexar Rmin a Rutas(Nmin)
    Else
        Nodos = Nodos – (T,P)
    End
End
```

**FIGURA 1: Heurística de Construcción de Rutas Iniciales**

En la Figura 1, se presenta la heurística propuesta en pseudo-código, donde $T$ y $P$ representan el conjunto de terminales y productos respectivamente, y cada par define un nodo. En el primer loop se identifica el producto-terminal no descartado que caerá primero bajo el stock de seguridad. Luego se identifican todas las rutas que visitan dicho terminal. A continuación se identifica las naves que puedan llegar a ese terminal dentro del horizonte de planificación. Mientras exista alguna ruta-nave factible, se busca la combinación producto-terminal dentro de la ruta que caería primero bajo el stock de seguridad, y se identifica el estanque que permitiría postergar lo más posible el instante en que se alcanza el stock de seguridad en el producto-terminal crítico, llenándolo con la máxima cantidad posible de ese producto. Finalmente, se escoge entre las rutas-nave factibles la de mínimo costo unitario, en $\$/m^3$ transportado, agregándola al plan.

## 4. ETAPA II: OPTIMIZACIÓN PARCIAL DE RUTAS

A partir de las rutas factibles definidas en Etapa 1, se toma un subconjunto de naves arbitrariamente, y se optimiza sus rutas. Para dicha optimización se considera como un dato exógeno los instantes de llegada y las cantidades (des)cargadas de cada producto en cada terminal por las naves que no serán optimizadas, para así actualizar correctamente los niveles de inventario de cada producto. La definición de las rutas óptimas para las naves modeladas, se basa en la minimización de costos operacionales más penalizaciones por inventarios inferiores a lo deseado, estableciéndose los siguientes niveles: i) inventario de seguridad; ii) quiebre de inventario; iii) inventario objetivo al final del horizonte de planificación; y iv) inventario superior a la capacidad de almacenamiento. En esta etapa se ignora la separación en estanques de los productos al interior de cada nave, pero se consideran las restricciones de calado y eslora permitido en cada terminal.

### 4.1 Formulación Matemática: Variables de Decisión y Parámetros del Modelo

$$x_{ik}^{b} = \begin{cases} 1, & \text{si nave } b \text{ realiza la } k\text{-ésima visita a } i, \quad (i,k) \in N \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

$$y_{ikjl}^{b} = \begin{cases} 1, & \text{si nave } b \text{ realiza la } l\text{-ésima visita a } j \text{ despues de la } k\text{-ésima visita a } i, \quad (i,k) \in N, (j,l) \in N \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

$$f_{ik}^{b} = \begin{cases} 1, & \text{si nave } b \text{ termina su recorrido en la } k\text{-ésima visita al terminal } i, \quad (i,k) \in N \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

$t_{ik}^{b}$ , $tcarga_{ik}^{b}$ = Instante de llegada y tiempo de (des)carga, respectivamente, de la nave $b$ al terminal $i$ en la $k$-ésima visita a $i$, en caso de que dicha nave realice la visita, de lo contrario ambos son cero.

$t_{ik}$ = Instante de llegada al terminal $i$ en la $k$-ésima visita a $i$, $(i,k) \in N$.

$u_{ikjl}^{bp}$ = Cantidad de producto $p$ que viaja en la nave $b$ desde la $k$-ésima visita a $i$ hasta la $l$-ésima visita a $j$, $(i,k) \in N$, $(j,l) \in N$.

$I_{ik}^{p}$ = Nivel de inventario del producto $p$ en $i$ al llegar la $k$-ésima visita, $(i,k) \in N$.

$Ifinal_i^p$ = Nivel de inventario del producto $p$ en $i$ al final del horizonte de planificación.

$q_{ik}^{bp}$ = Volumen del producto $p$ que será cargado ($\geq 0$) o descargado ($<0$) por la nave $b$ en la $k$-ésima visita a $i$, $(i,k) \in N$. $q_{ik}^{b} = \sum_p q_{ik}^{bp}$, donde $\mu_{ik}^{bp}$ es una variable auxiliar que indica la cantidad de producto $p$ que será cargada o descargada de la nave $b$ en la $k$-ésima visita a $i$.

$\mu_{ik}^{bp} = \left|q_{ik}^{bp}\right|$, $(i,k) \in N$.

$\delta_{ik}^{p}$, $\delta\_dos_{ik}^{p}$ = Déficit de inventario de producto $p$ en terminal $i$ durante la visita $k$, respecto al nivel de seguridad y bajo cero respectivamente, para todo $(i,k) \in N$.

$\delta final_i^p$, $\delta final\_dos_i^p$, $\delta final\_tres_i^p$ = Déficit de inventario de producto $p$ en terminal $i$ al final del horizonte de planificación, con respecto al nivel de inventario objetivo, nivel de seguridad, y bajo cero, respectivamente.

$\delta cap_{ik}^{p}$, $\delta cap\_dos_{ik}^{p}$ = Cantidad de producto $p$ por sobre la capacidad del terminal $i$ en la visita $k$, cuando se realiza una visita de una nave, y cuando se produce una importación, respectivamente.

$\delta no\_neg_{ik}^{p}$, $\delta no\_neg\_dos_{ik}^{p}$ = Déficit de producto $p$ en terminal de oferta $i$ en la visita $k$, cuando se realiza una visita de una nave, y cuando se produce una importación, respectivamente.

T es el largo del horizonte de planificación; N es el conjunto de nodos, correspondientes a combinaciones entre terminales y visitas, $(i,k)$, programados para naves del sistema. Los parámetros relacionados a las características de los terminales son: $Lmax_i$, eslora máxima aceptada en el terminal $i$; $Wmax_i$, peso máximo aceptado en el terminal $i$; $d_{ij}$, distancia entre los terminales $i$ y $j$; $a_{ik}$ y $b_{ik}$, el comienzo y final respectivamente de la ventana de tiempo para la $k$-ésima visita a $i$; $Cap_i^p$, capacidad de almacenaje del producto $p$ en el terminal $i$; $te_i^k$, tiempo mínimo de detención en terminal $i$ durante visita $k$, puede variar de una visita a otra, por ejemplo si se sabe que habrá mayor congestión el terminal; $\xi_{ik}$, instante programado para que una nave externa al sistema realice la visita $k$ al terminal $i$; $D_i^p$, tasa de demanda (producción) del producto $p$ en el terminal $i$; $import_{ik}^p$, volumen de producto $p$ importado directamente por terminal $i$ en la visita $k$; $de_p$, densidad del producto $p$; $\varphi_i^p$, volumen mínimo de descarga de producto $p$ en el terminal $i$; y $K_i$, visita final al terminal $i$.

B es el conjunto de naves del sistema, y sus características son: $v^b$, velocidad operacional de la nave $b$; $Vol^b$, capacidad máxima de almacenaje de la nave $b$; $\tau_i^{bp}$, tasa de carga/descarga ($m^3$/día) del producto $p$ para nave $b$ en el terminal $i$; $eslora^b$, eslora de la nave $b$; $draught^b$, calado de la nave $b$; $deadweight^b$, peso muerto de la nave $b$; $TPC^b$, constante TPC de la nave $b$; $knave^b$, tonelaje mínimo de la nave $b$, aún cuando no transporte productos; y $C_i^b$, restricción de calado máximo para nave $b$ en terminal $i$. Los parámetros relacionados a costos de operación de la nave $b$ son: $Cnavegación_b$, costo unitario por día de navegación; $Cpuerto_i^b$, costo de atraque en el terminal $i$; $Cestadía_i^b$, costo por hora estadía-eslora en el terminal $i$; y $Cfaena_i^b$, costo unitario de (des)carga por tiempo de faena en $i$. Los parámetros relacionados a restricciones blandas del modelo son: $\alpha_{p1}$, $\alpha_{p2}$ y $\alpha_{p3}$ penalidades por $m^3$ de mantener un inventario total del producto $p$, inferior al nivel mínimo establecido($Imin_i^p$), stock de seguridad ($SS_i^p$) y bajo cero, respectivamente, para ese terminal $i$, al final del horizonte de planificación; y $m_i^{p1}$, $m_i^{p2}$ y $m_i^{p3}$ penalidades por $m^3$ de estar bajo el inventario de seguridad exigido para el producto $p$ en terminal $i$. Finalmente, los parámetros relacionados a las condiciones iniciales del sistema son: $inicio_i^b$, indicador de si el terminal $i$ es la posición inicial de la nave $b$, toma el valor 1 si sí y 0 si no; $tipo\_terminal_i$, indicador de si el terminal $i$ es de oferta (=1) o de demanda (=0); $t\_inicio_i^b$, instante de llegada al terminal $i$, si este corresponde a la posición inicial de la nave $b$; $q\_inicial_i^{bp}$, carga inicial de la nave $b$ de cada producto $p$; e $inventario_i^p$, inventario inicial del producto $p$ en terminal $i$.

### 4.2 Formulación Matemática: Función Objetivo y Restricciones

$$\text{Min.} \sum_{b=1}^{B} \sum_{(i,k)\in N} \left\{ c_{navegación}{}^{b} \sum_{(j,l)\in N} \frac{d_{ij} \cdot y_{ikjl}^{b}}{v^{b}} + c_{faena}{}_{i}^{b} \sum_{p,e} t_{carga}{}_{ik}^{b} + c_{puerto}{}_{i}^{b} x_{ik}^{b} + c_{estadia}{}_{i}^{b} \cdot eslora^{b} \cdot te_{i}^{k} \cdot x_{ik}^{b} \right\}$$
$$+ \sum_{i}\sum_{p} \alpha_{p1} \delta\, final_{i}^{p} + \sum_{i}\sum_{p} \alpha_{p2} \delta\, final\_dos_{i}^{p} + \sum_{i}\sum_{p} \alpha_{p3} \delta\, final\_tres_{i}^{p}$$
$$+ \sum_{(i,k)\in N}\sum_{p} m_{i}^{p1} \delta_{ik}^{p} + \sum_{(i,k)\in N}\sum_{p} m_{i}^{p2} \delta\_dos_{ik}^{p} + \sum_{(i,k)\in N}\sum_{p} m_{i}^{p3} \delta cap_{ik}^{p}$$
$$+ \sum_{(i,k)\in N}\sum_{p} m_{i}^{p3} \delta cap\_dos_{ik}^{p} + \sum_{(i,k)\in N}\sum_{p} m_{i}^{p3} \delta no\_neg_{ik}^{p} + \sum_{(i,k)\in N}\sum_{p} m_{i}^{p3} \delta no\_neg\_dos_{ik}^{p} \quad (1)$$

Sujeto a:

$$x_{ik}^{b} = inicio_{i}^{b}\ , \quad \forall\, b, i, k = 0 \quad (2)$$

$$I_{ik}^{p} = inventario_{i}^{p}\ , \quad \forall\, i, p, k = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{(j,l)\in N} u_{ikjl}^{bpe} = q\_inicial_{i}^{bpe} \qquad \forall i / inicio_{i}^{b} = 1, k = 0, b, p, e \quad (4)$$

$$y_{ikjl}^{b} \le x_{ik}^{b} \quad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, l \ne 0 \quad (5)$$

$$y_{ikjl}^{b} \le x_{jl}^{b} \quad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, l \ne 0 \quad (6)$$

$$y_{ikik}^{b} = 0 \quad \forall (i,k) \in N, b \in B \quad (7)$$

$$y_{ikil}^{b} = 0 \quad \forall (i,k) \in N, (i,l) \in N, b \in B, l \ne k, k \ne 0 \quad (8)$$

$$y_{ikjl}^{b} + y_{jlik}^{b} \le 1 \quad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, l \ne 0, k \ne 0, dij = 0 \quad (9)$$

$$\sum_{(i,k)\in N} x_{ik}^{b} = 1 \qquad \forall b, k \ne 0 \quad (10)$$

$$x_{ik}^{b} = \sum_{(m,n)} y_{ikmn}^{b} + f_{ik}^{b} \qquad \forall (i,k) \in N, b \in B \quad (11)$$

$$\sum_{(i,k)} y_{ikjl}^{b} = \sum_{(m,n)} y_{jlmn}^{b} + f_{jl}^{b} \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, l \ne 0 \quad (12)$$

$$f_{jl}^{b} + \sum_{(m,n)} y_{jlmn}^{b} = 1 \qquad \forall (j,l) \in N / inicio_{j}^{b} = 1 \ y \ l = 0, b \in B \quad (13)$$

$$\sum_{(i,k)\in N} f_{ik}^{b} = 1 \qquad \forall b \quad (14)$$

$$Y_{ikjl}^{b} + Y_{jlik+1}^{b} \le 1 \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b / D_{i}^{p} > 0\ \forall p \quad (15)$$

$$Y_{ikjl}^{b} = 0 \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b, l > 0 / a_{ik} + te_{i}^{k} + d_{ij} / v^{b} > b_{jl} \quad (16)$$

$$t_{jl}^{b} \ge t_{ik}^{b} + \frac{d_{ij}}{v^{b}} - \left(1 - y_{ikjl}^{b}\right) M + t_{carga}{}_{ik}^{b} + te_{i}^{k} \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, k \ne 0, j \ne i \quad (17)$$

$$t_{jl}^{b} \ge t_{ik}^{b} - \left(1 - y_{ikjl}^{b}\right) M + t_{carga}{}_{ik}^{b} \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, k \ne 0, j \ne i / dij = 0 \quad (18)$$

$$t_{jl}^{b} \ge t\_inicio_{i}^{b} + \frac{d_{ij}}{v^{b}} - \left(1 - y_{ikjl}^{b}\right) M \ \ \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, inicio_{i}^{b} = 1, k = 0, j \ne i \quad (19)$$

$$t_{jl}^{b} \ge t\_inicio_{i}^{b} - \left(1 - y_{ikjl}^{b}\right) M \ \ \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, inicio_{i}^{b} = 1, k = 0, l > 0, j = i \quad (20)$$

$$a_{ik} \cdot x_{ik}^{b} \le t_{ik}^{b} \le b_{ik} \cdot x_{ik}^{b} \qquad \forall (i,k) \in N, k \ne 0, b \in B \quad (21)$$

$$x_{ik}^{b} = 0 \quad \forall (i,k) \in N, k \ne 0, b \in B / \quad (b_{ik} - a_{ik}) <= te_{i}^{k} + 0{,}08 \quad (22)$$

$$t_{ik} = \sum_{b=1}^{B} t_{ik}^{b} \qquad \forall (i,k) \in N, k \ne 0 \quad (23)$$

$$t_{ik-1} \le t_{ik} \qquad \forall (i,k) \in N, k \ne 0 \quad (24)$$

$$tcarga_{ik}^{b} = \sum_{p,e} \frac{1}{\tau_i^{bp}} \cdot \mu_{ik}^{bpe} \tag{25}$$

$$\mu_{ik}^{bpe} \geq q_{ik}^{bpe} \qquad \forall (i,k) \in N / k \neq 0, b \in B \tag{26}$$

$$\mu_{ik}^{bpe} \geq -q_{ik}^{bpe} \qquad \forall (i,k) \in N / k \neq 0, b \in B \tag{27}$$

$$q_{ik}^{bp} = 0 \qquad \forall (i,k) \in N, k = 0, b \in B \tag{28}$$

$$q_{ik}^{bp} \geq 0 \qquad \forall (i,k) \in N / k \neq 0 \ y \ tipo\_terminal_i = 0, p, b \in B \tag{29}$$

$$q_{ik}^{bp} \leq 0 \qquad \forall (i,k) \in N / k \neq 0 \ y \ tipo\_terminal_i = 1, p, b \in B \tag{30}$$

$$q_{ik}^{bp} = \sum_{(j,l) \in N \setminus (i,k)} u_{ikjl}^{bp} - \sum_{(j,l) \in N \setminus (i,k)} u_{jlik}^{bp} \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, b, p \tag{31}$$

$$\sum_{p} u_{ikjl}^{bp} \leq y_{ikjl}^{b} \cdot Vol^{be} \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \tag{32}$$

$$\sum_{p} \mu_{ik}^{b} \leq Vol^{b} \cdot x_{ik}^{b} \qquad \forall (i,k) \in N, b \tag{33}$$

$$u_{ikjl}^{bp} = 0 \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, l = 0, b, p \tag{34}$$

$$q_{ik}^{b} = \sum_{p} q_{ik}^{bp} \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, b \tag{35}$$

$$Ifinal_i^p = \left( I_{ik}^p + \sum_{b=1}^{B} q_{ik}^{bp} + import_{ik}^p \right) - \left( T - t_{ik} \right) \cdot D_i^p \qquad \forall k = K_i, i, p \tag{36}$$

$$Ifinal_i^p = inventario_i^p - T \cdot D_i^p \qquad \forall i, p / K_i = 0 \tag{37}$$

$$I_{ik}^p = I_{ik-1}^p - (t_{ik} - t_{ik-1}) D_i^p + \sum_{b=1}^{B} q_{ik-1}^{bp} + import_{ik-1}^p \qquad \forall (i,k) \in N, k > 1, p \tag{38}$$

$$I_{ik}^p = inventario_i^p - t_{ik} D_i^p \qquad \forall (i,k) \in N, k = 1, p \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &\delta cap_{ik}^p \geq -Cap_i^p + \left( I_{ik}^p + \sum_{b=1}^{B} q_{ik}^{bp} \right) \\ &\delta cap_{ik}^p \geq 0 \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, p / D_i^p \neq 0 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &\delta cap\_dos_{ik}^p \geq -Cap_i^p + \left( I_{ik}^p + \sum_{b=1}^{B} q_{ik}^{bp} - (\xi_{ik} - t_{ik}) \cdot D_i^p + import_{ik}^p \right) \\ &\delta cap\_dos_{ik}^p \geq 0 \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, p / D_i^p \neq 0, import_{ik}^p \neq 0 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} &\delta no\_neg_{ik}^p \geq -\left( I_{ik}^p + \sum_{b=1}^{B} q_{ik}^{bp} \right) \\ &\delta no\_neg_{ik}^p \geq 0 \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, p / D_i^p < 0 \\ &\delta no\_neg\_dos_{ik}^p \geq -\left( I_{ik}^p + \sum_{b=1}^{B} q_{ik}^{bp} - (\xi_{ik} - t_{ik}) \cdot D_i^p + import_{ik}^p \right) \\ &\delta no\_neg\_dos_{ik}^p \geq 0 \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, p / D_i^p < 0, import_{ik}^p \neq 0 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} &\delta_{ik}^p \geq SS_i^p - I_{ik}^p \qquad \forall k \neq 0, i, p \\ &\delta_{ik}^p \geq 0 \qquad \forall k \neq 0, i, p \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &\delta\_dos_{ik}^p \geq -I_{ik}^p \qquad \forall k \neq 0, i, p \\ &\delta\_dos_{ik}^p \geq 0 \qquad \forall k \neq 0, i, p \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} &\delta final_i^p \geq Imin_i^p - Ifinal_i^p \qquad \forall i, p \\ &\delta final_i^p \geq 0 \qquad \forall i, p \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} &\delta final\_dos_i^p \geq SS_i^p - Ifinal_i^p \qquad \forall i, p \\ &\delta final\_dos_i^p \geq 0 \qquad \forall i, p \end{aligned} \tag{46}$$

$$\delta final\_tres_i^p \geq -Ifinal_i^p \qquad \forall i,p$$
$$\delta final\_tres_i^p \geq 0 \qquad \forall i,p \tag{47}$$

$$draught^b - (deadweight^b - knave^b - \sum_p u_{ikjl}^{bp} de_p)/TPC^b/100 \leq C_i^b \quad \forall (i,k)\in N,(j,l)\in N, j\neq i, l\neq 0, b$$
$$draught^b - (deadweight^b - knave^b - \sum_p u_{ikjl}^{bp} de_p)/TPC^b/100 \leq C_j^b \quad \forall (i,k)\in N,(j,l)\in N, j\neq i, l\neq 0, b \tag{48}$$

$$\sum_b x_{ik}^b \cdot eslora^b \leq Lmax_i \qquad \forall\ (i,k)\in N \tag{49}$$

$$x_{ik}^b \cdot knave^b + \sum_{(m,n)} \sum_p u_{mnik}^{bp} \cdot de_p \leq Wmax_i \qquad \forall\ i,k\neq 0, b$$
$$x_{ik}^b \cdot knave^b + \sum_{(m,n)} \sum_p u_{ikmn}^{bp} de_p \leq Wmax_i \qquad \forall\ i,k\neq 0, b \tag{50}$$

La función objetivo (1), considera los costos de transporte para el horizonte de planificación más penalidades por quiebres de inventario y violaciones a los niveles de inventario de seguridad y niveles de inventario deseados al final del horizonte de planificación. Las restricciones (2) a (4) representan condiciones iniciales del sistema. La ecuación (2) asegura que las naves inicien sus recorridos en la ubicación inicial de cada una. La restricción (3) inicializa la variable inventario en el inventario inicial de producto $p$ en cada terminal $i$. Por su parte, (4) inicializa la cantidad de producto $p$ transportada en el estanque $e$ de cada nave $b$, entre el nodo inicial y su nodo sucesor con la carga inicial de la nave. Las restricciones (5) a (16) relacionan operaciones en arcos con las operaciones en nodos. Las restricciones (5) y (6) obligan a que sea necesario que la nave $b$ haya visitado a $i$ en su $k$-ésima visita y que visite $j$ en su $l$-ésima visita, para que realice la $l$-ésima visita al terminal $j$ después de la $k$-ésima visita al terminal $i$. Las restricciones (7) a (9) evitan que se formen loops. Como puede ocurrir que una nave parta inicialmente descargada en un puerto de oferta y deba ser cargada, se permiten arcos desde la visita cero a un terminal a la siguiente visita al mismo terminal. La restricción (10) implica que sólo una nave $b$ realiza la visita $k$ al terminal $i$, exceptuando la visita cero en que puede haber más de una nave en un mismo terminal. En (11) se asegura que si una nave $b$ realiza la visita $k$ a un terminal $i$, tiene dos alternativas o viaja hacia la visita $n$ a algún terminal $m$, o termina su recorrido en el terminal $i$. En (12) si una nave $b$ visita el terminal $j$ en su l-ésima visita, puede salir hacia la $n$-ésima visita a algún terminal $m$ o terminar su recorrido en la visita $l$ del terminal $j$. En (13) si al comienzo del horizonte de planificación, la nave $b$ se encuentra en el terminal $j$, puede salir hacia la $n$-ésima visita a algún puerto $m$ o permanecer en el terminal $j$. En (14) se asegura que una nave puede terminar su recorrido en un sólo puerto. En (15) se restringe a que una nave que va a un nodo de demanda no pueda volver inmediatamente. Finalmente, en (16) se eliminan a priori arcos infactibles por restricciones de tiempo establecidas para cada par terminal-visita.

Las restricciones (17) a (25) aseguran que se cumplan los tiempos de viajes y ventanas de tiempos. En (17), el instante de llegada de la nave $b$ al terminal $j$ en la visita $l$, es igual o superior al instante de llegada de la nave $b$ al terminal $i$ en la visita $k$, más el tiempo de viaje entre el terminal $i$ y el terminal $j$, más el tiempo de carga/descarga del producto $p$ desde nave $b$ en el terminal $i$ y más el tiempo mínimo de detención asociado a ese terminal en esa visita. Si el buque $b$ no visita en $l$ al terminal $j$, proviniendo de la visita $k$ del terminal $i$, se suma una constante de gran tamaño, $M$, que inactiva la restricción. En (18), similar a la restricción anterior, esta versión es válida para terminales con distancia igual a cero, es decir para los pares que involucren dos terminales en el mismo puerto, en este caso si hay un arco que los une se suma sólo una vez el tiempo de espera en cada terminal. En (19) el instante de llegada de la nave $b$ al terminal $j$ en la visita l, es igual o superior al instante inicial de la nave $b$, más el tiempo de viaje entre el terminal de inicio $i$ y el terminal $j$. Si la nave no visita en $l$ el terminal $j$, proviniendo desde su estado inicial, se suma una constante. de gran tamaño que inactiva la restricción. En (20), similar a la restricción anterior, esta versión es válida cuando la primera visita es al mismo terminal de inicio. En (21), el instante de llegada de la nave $b$ al terminal $i$ en la visita $k$ debe estar contenido en la ventana de tiempo que se definió para esa visita en ese terminal. En (22), si el ancho de la ventana de tiempo asociada a una visita $k$ es inferior al tiempo de espera más dos horas, no puede pasar una nave por dicho terminal. Esta restricción permite evitar congestión en terminales. En (23), el instante en que se realiza la visita $k$ al terminal $i$ es igual al instante en que llega la nave $b$ que realiza la visita $k$ al terminal $i$. En (24), el instante en que se realiza la visita $k$ al terminal $i$, debe ser posterior al instante en que se realizó la visita anterior (k-1) al terminal $i$. En (25), el tiempo de carga (descarga) de la nave $b$ en la visita $k$ al terminal $i$ es la suma de los tiempos de carga (descarga) de cada producto. Las restricciones (26) a (35) corresponden a ecuaciones de continuidad de flujos. Las ecuaciones (26) y (27) indican que $\mu_{ik}^{bpe} = \left|q_{ik}^{bpe}\right|$. En (28), se asegura que no se puede descargar producto $p$ de una nave $b$ en la visita inicial. En (29) y (30), se impide sacar (dejar) productos en terminales de demanda (oferta). En (31), la cantidad (des)cargada de producto $p$ de la nave $b$ en la visita $k$ al terminal $i$, es igual a la cantidad transportada de producto $p$ en la nave $b$ en los tramos inmediatamente posteriores a la visita $k$ al terminal $i$, menos la cantidad transportada de producto $p$ en la nave $b$ en los tramos inmediatamente anteriores a la visita $k$ al terminal $i$. En (32), la cantidad transportada de producto $p$ en la nave $b$ entre dos visitas, debe ser inferior o igual a la capacidad de almacenaje de la nave $b$. En (33), la cantidad de producto $p$ cargada o descargada desde estanque $e$ de la nave $b$, debe ser menor o igual a la capacidad del estanque, siempre que la visita se haya sido realizada por la nave $b$. En (34), se impide el transporte de producto $p$ entre la visita $k$ a un terminal $i$ y la visita 0 a un terminal $j$. En (35), el volumen cargado/descargado por la nave $b$ en el terminal $i$ en la visita $k$ es igual a la suma del volumen cargado/descargado de cada producto.

Las restricciones (36) a (47) corresponden a restricciones de inventario. En (36), el inventario de producto $p$ en el terminal $i$ al final del horizonte de modelación es igual al inventario al inicio de la última visita ($K_i$) más la cantidad (des)cargada de ese producto en el terminal i y la cantidad de producto $p$ importada directamente por el terminal $i$ durante la última visita, menos el consumo de producto $p$ desde el instante en que se realizó la última visita y el final del horizonte de modelación $T$. En (37), el inventario de producto $p$ en el terminal $i$ al final del horizonte de modelación, si éste no fue visitado, es igual al inventario al inicio del horizonte de modelación menos el consumo de producto $p$ durante el horizonte de modelación $T$. En (38), el inventario de producto $p$ en el terminal $i$ al llegar (antes de descargar) la visita $k$, deber ser igual al inventario de producto $p$ al llegar la visita anterior al mismo terminal, menos la cantidad consumida de producto $p$ desde el instante en que se realizó la visita anterior al terminal $i$, más la cantidad cargada o descargada de producto $p$ en la visita $k$-1 al terminal $i$ y más la cantidad de producto $p$ importada directamente por terminal $i$ en la visita $k$-1. En (39), el inventario de producto $p$ en el terminal $i$ al llegar (antes de descargar) la primera visita, es igual al inventario inicial de producto $p$ menos la cantidad consumida de producto $p$, desde el inicio hasta el día en que se realiza la primera visita. En (40)-(42), el inventario de producto $p$ en el terminal $i$ al inicio de la visita $k$, más la cantidad (des)cargada de ese producto en el terminal $i$ durante la visita $k$ y la cantidad de producto $p$ importada directamente por el terminal $i$ en la visita $k$, debe ser inferior o igual a la capacidad máxima de almacenamiento del producto $p$ en el terminal $i$ además debe ser positivo (mayor o igual a cero para los terminales de oferta). Estas restricciones se relajan a partir de las variables deltas respectivas, las cuales son penalizadas en la función objetivo. En (43), el déficit de inventario (bajo el stock de seguridad) de producto $p$ en el terminal $i$ durante la visita $k$ debe ser superior a la diferencia entre el stock de seguridad exigido para el producto $p$ en el terminal $i$ y el inventario real de producto $p$ en el terminal $i$ durante la visita $k$. Además este déficit debe ser no negativo. En (44), el déficit de inventario (bajo cero) de producto $p$ en el terminal $i$ durante la visita $k$ es mayor o igual a menos el inventario real de producto $p$ en el terminal $i$ durante la visita $k$. Además este déficit debe ser no negativo. En (45), el déficit de inventario (bajo el inventario objetivo) de producto $p$ en el terminal $i$ al final del horizonte, debe ser superior a la diferencia entre el inventario objetivo para el producto $p$ en el terminal $i$, y el inventario real de producto $p$ en el terminal $i$ al final del horizonte. Además este déficit debe ser no negativo. En (46), el déficit de inventario (bajo el stock de seguridad) de producto $p$ en el terminal $i$ al final del horizonte, debe ser superior a la diferencia entre el stock de seguridad para el producto $p$ en el terminal $i$, y el inventario real de producto $p$ en el terminal $i$ al final del horizonte. Además este déficit debe ser no negativo. Análogamente en (47), el déficit de inventario (bajo cero) de producto $p$ en el terminal $i$ al final del horizonte es mayor o igual al negativo del inventario final de producto $p$ en el terminal $i$. Además este déficit debe ser no negativo. Finalmente, las expresiones (48) a (50) permiten respetar las restricciones de calado, eslora, y peso respectivamente. En (48), se asegura que el calado de la nave $b$ a la salida del terminal $i$ debe ser inferior al calado máximo permitido en ese terminal, y que el calado de la nave $b$ a la llegada al terminal $j$ debe ser inferior al calado máximo permitido en ese terminal. En (49), se asegura que una nave $b$ pueda visitar el terminal $i$ sólo si su eslora es menor o igual a la máxima permitida por ese terminal. Por último, en (50) se asegura que una nave $b$ puede llegar o salir de un terminal $i$ sólo si su carga total es menor o igual al peso máximo permitido por ese terminal.

## 5. ETAPA III: OPTIMIZACIÓN DE CANTIDAD (DES)CARGADA POR CADA NAVE

A partir del resultado obtenido en la Etapa II, se optimiza la cantidad a (des)cargar de cada producto en cada estanque para cada nave, manteniendo fijas las rutas obtenidas en la Etapa II. La obtención de cantidades óptimas a (des)cargar en cada estanque para las naves modeladas, se basa en la minimización de la función objetivo (1), utilizada en la Etapa II, y considera para cada nave sus restricciones de estiba (misma segregación o contigua), así como uso predefinido de estanques. A continuación se presenta la formulación matemática de este problema.

### 5.1 Formulación Matemática: Variables de Decisión y Parámetros del Modelo

$$v_{ikjl}^{bpe} = \begin{cases} 1, \text{ si nave } b \text{ lleva producto } p \text{ en estanque } e \text{ durante el trayecto desde la } k\text{-ésima visita} \\ \quad \text{a } i \text{ a la } l\text{-ésima visita a } j, \quad (i,k) \in N, (j,l) \in N \\ 0, \text{ si no} \end{cases}$$

$t_{ik}^{b}$ = Instante de llegada de la nave $b$ en la $k$-ésima visita al terminal $i$, en caso de que dicha nave realice la visita, de lo contrario es cero, donde $t_{ik} = \sum_b t_{ik}^b$ es el instante de llegada al terminal $i$ en la $k$-ésima visita a $i$, $(i,k) \in N$.

$tcarga_{ik}^{b}$ =Tiempo de carga (descarga) de la nave $b$ en terminal $i$ en la $k$-ésima visita, en caso de que dicha nave realice la visita, de lo contrario es cero.

$u_{ikjl}^{bpe}$ = Cantidad de producto $p$ que viaja en el estanque $e$ de la nave $b$ desde la $k$-ésima visita a $i$ hasta la $l$-ésima visita a $j$, $(i,k) \in N$, $(j,l) \in N$.

$q_{ik}^{bpe}$ = Volumen del producto $p$ que será cargado ($\geq 0$) o descargado ($<0$) en el estanque $e$ de la nave $b$ en la $k$-ésima visita a $i$ , $(i,k) \in N$, donde $\mu_{ik}^{bpe}$ es una variable auxiliar que indica la cantidad de producto $p$ que será cargado o descargado en el estanque $e$ de la nave $b$ en la $k$-ésima visita a $i$. $\mu_{ik}^{bpe} = \left| q_{ik}^{bpe} \right|$, $(i,k) \in N$.

$$\gamma_{ik}^{p} = \begin{cases} 1, \text{ si se deja producto } p \text{ en la } k\text{-ésima visita al terminal i} \quad (i,k) \in N \\ 0, \text{ si no} \end{cases}$$

Además de los parámetros presentados en 4.1, se considera $x_{ik}^{b}$ e $y_{ikjl}^{b}$ tal como fueron definidos en 4.1, pero en este caso son parámetros del problema. Para asegurar que el problema sea factible se considera un conjunto B' de naves "fantasmas" con velocidad infinita que permiten cumplir con todas las ventanas de tiempo. $L$ es el conjunto de productos de limpios, y $S$ es el conjunto de productos sucios. Además, para cada nave $b$, se define su conjunto de estanques, $E_b = S(E_b) \bigcup L(E_b)$, donde

$S(E_b)$ es el set de estanques sucios de la nave *b* al inicio del período de planificación, y $L(E_b)$ es el set de estanques limpios de la nave *b* al inicio del período de planificación. $Seg^b$ es el número de segregaciones de la nave *b*; $Seg^{be}$ es la segregación a la que pertenece el estanque *e* de la nave *b*; $estiba_1^{bqp}$ es un indicador que toma el valor 1 si la nave *b* admite producto *p* y *q* en misma segregación, y 0 si no; $estiba_2^{bqp}$ es un indicador que toma el valor 1 si nave *b* admite producto *p* y *q* en una segregación contigua, y 0 si no; y $uso_p^{be}$ es un indicador que toma el valor 1 si el estanque *e* de la nave *b* puede llevar producto *p*, y 0 si no.

### 5.2 Formulación Matemática: Función Objetivo y Restricciones

Utilizando la misma función objetivo presentada en 4.2, se obtiene las cantidades y productos a cargar y descargar en cada estanque de la nave para las rutas obtenidas en la Etapa II del modelo. Para tal efecto, se consideran las restricciones presentadas en 4.2, pero modificándolas para tomar en cuenta que las rutas de las naves son un parámetro del problema. Es importante notar que como las cantidades a cargar y descargar pueden ser modificadas, se permite cambiar los instantes de llegadas de las naves a los terminales. De esta forma, las restricciones (3) y (4) relacionadas a las condiciones iniciales del sistema se mantienen, eliminando la restricción (2). Por el mismo motivo, se eliminan las restricciones (5) a (16). Las restricciones relacionadas a ventanas de tiempo y tiempos de viajes pueden reescribirse de la siguiente forma:

$$t_{jl}^b \geq t_{ik}^b + \frac{d_{ij}}{v^b} + tcarga_{ik}^b + te_i^k \quad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, k \neq 0, y_{ikjl}^b = 1, d_{ij} > 0 \tag{51}$$

$$t_{jl}^b \geq t_{ik}^b + tcarga_{ik}^b \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, k \neq 0, y_{ikjl}^b = 1, d_{ij} = 0 \tag{52}$$

$$t_{jl}^b \geq t_{ik}^b + \frac{d_{ij}}{v^b} \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b \in B, k = 0, y_{ikjl}^b = 1 \tag{53}$$

$$a_{ik} \cdot x_{ik}^b \leq t_{ik}^b \leq b_{ik} \cdot x_{ik}^b \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, b \in B \tag{54}$$

$$t_{ik} = \xi_{ik} \qquad \forall (i,k) \in N, b \in B', x_{ik}^b = 1 \tag{55}$$

$$t_{ik} = t_{ik}^b \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, b \in B, x_{ik}^b = 1 \tag{56}$$

$$tcarga_{ik}^b = \sum_{p,e} \frac{1}{\tau_i^{bp}} \cdot \mu_{ik}^{bpe} \tag{57}$$

donde las expresiones (51) a (54) corresponden a la versión con rutas fijas de las restricciones (17) a (21). En (55) y (56), se explicita el instante en que se realiza la visita *k* al terminal *i*. En (57), se asegura que el tiempo de (des)carga de la nave *b* en la visita *k* al terminal *i* es la suma de los tiempos de (des)carga de cada producto. Por su parte, las restricciones de continuidad de flujos (26) a (28) se mantienen. Las restricciones (29) y (30) se reescriben considerando estanques:

$$q_{ik}^{bpe} \geq 0 \qquad \forall (i,k) \in N / k \neq 0 \ y \ \ tipo\_terminal_i = 0, p, b \in B, e \tag{58}$$

$$q_{ik}^{bpe} \leq 0 \qquad \forall (i,k) \in N / k \neq 0 \ y \ \ tipo\_terminal_i = 1, p, b \in B, e \tag{59}$$

donde $q_{ik}^{bp} = \sum_{e \in E_b} q_{ik}^{bpe}$. (60) se incorpora para que la cantidad descargada del producto *p* en el terminal *i* sea superior al volumen mínimo exigido. Las restricciones (31) a (35) se reescriben de la siguiente forma.

$$q_{ik}^{bp} \geq \varphi_i^p \gamma_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{p}} \qquad \forall (i,k) \in N / k \neq 0, D_i^p > 0, p, b \in B, x_{ik}^b = 1 \tag{60}$$

$$q_{ik}^{bpe} = \sum_{(j,l) \in N \setminus (i,k)} u_{ikjl}^{bpe} - \sum_{(j,l) \in N \setminus (i,k)} u_{jlik}^{bpe} \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, b, p, e \tag{61}$$

$$u_{ikjl}^{bpe} \leq v_{ikjl}^{bpe} \cdot Vol^{be} \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b, p, e \tag{62}$$

$$\mu_{ik}^{bpe} \leq Vol^{be} \cdot uso_p^{be} \qquad \forall (i,k) \in N, b, p, e, x_{ik}^b = 1 \tag{63}$$

$$q_{ik}^{bpe} = 0 \qquad \forall (i,k) \in N, p, b \in B, e, x_{ik}^b = 0 \tag{64}$$

$$v_{ikjl}^{bpe} = 0 \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, l = 0, b, p, e \tag{65}$$

$$q_{ik}^b = \sum_p q_{ik}^{bp} \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, b \tag{66}$$

$$q_{ik}^{bp} = \sum_{e \in E_b} q_{ik}^{bpe} \qquad \forall (i,k) \in N, k \neq 0, b, p \tag{67}$$

$$\sum_p v_{ikjl}^{bpe} \leq 1 \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b, e, y_{ikjl}^b = 1 \tag{68}$$

$$\sum_p v_{ikjl}^{bpe} = 0 \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b, e, y_{ikjl}^b = 0 \tag{69}$$

donde (62) asegura que la cantidad transportada de producto *p* en el estanque *e* de la nave *b* entre dos visitas, debe ser inferior o igual a la capacidad de almacenaje de producto *p* en el estanque *e* de la nave *b*. En (63) se exige que la cantidad de producto *p* cargada o descargada desde estanque *e* de la nave *b*, debe ser menor o igual a la capacidad del estanque, siempre que el estanque esté disponible para llevar producto *p*. En (64) se asegura no cargar o descargar productos en terminales no visitados. En (68) y (69) se asegura que la nave *b* puede transportar sólo un producto en el estanque *e* entre la visita *k* al terminal *i* y la visita *l* al terminal *j*, si es que recorre este arco, si no, no puede llevar ningún producto. Las restricciones de inventario (36) a (47), pueden reescribirse fácilmente en el caso con rutas fijas. La presentación de dichas restricciones se omite para evitar extender innecesariamente este trabajo. Por su parte, las restricciones de calado y peso, se pueden reescribir considerando los estanques y rutas fijas, como se muestra en (70) y (71). Además, en este caso la restricción de eslora es innecesaria, ya que las rutas construidas en la Etapa II por construcción respetan dicha restricción. Sin embargo, en el problema estudiado se considera dos tipos de productos, que pueden ser transportados en estanques dedicados exclusivamente a ese tipo de productos. Para evitar asignar productos limpios a estanques dedicados al transporte de productos sucios, y viceversa, se debe agregar las restricciones (72) y (73). Finalmente, para respetar restricciones de estiba de las naves, que imponen limitaciones al conjunto de productos que puede transportarse en una misma segregación, y a productos que pueden transportarse en estanques contiguos, se incluye las restricciones (74) y (75), respectivamente.

$$draught^b - (deadweight^b - knave^b - \sum_{e \in E(b)} \sum_p u_{ikjl}^{bpe} de_p)/TPC^b/100 \le C_i^b \quad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b, y_{ikjl}^b = 1$$

$$draught^b - (deadweight^b - knave^b - \sum_{e \in E(b)} \sum_p u_{ikjl}^{bpe} de_p)/TPC^b/100 \le C_j^b \quad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b, y_{ikjl}^b = 1 \tag{70}$$

$$knave^b + \sum_{(m,n)} \sum_{e \in E_b} \sum_p u_{mnik}^{bpe} \cdot de_p \le Wmax_i \qquad \forall\ i,k \ne 0, b, y_{mnik}^b = 1$$

$$knave^b + \sum_{(m,n)} \sum_{e \in E_b} \sum_p u_{ikmn}^{bpe} \cdot de_p \le Wmax_i \qquad \forall\ i,k \ne 0, b, y_{ikmn}^b = 1 \tag{71}$$

$$\sum_{p \in L} q_{ik}^{bpe} = 0, \qquad \forall (i,k) \in N, b, e \in E(s) \tag{72}$$

$$\sum_{p \in S} q_{ik}^{bpe} = 0, \qquad \forall (i,k) \in N, b, e \in E(l) \tag{73}$$

$$v_{ikjl}^{bpe} + v_{ikjl}^{bqf} \le 1 + estiba_1^{bqp} \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b, e, f, p \ne q, Seg^{be} = Seg^{bf} \tag{74}$$

$$v_{ikjl}^{bpe} + v_{ikjl}^{bqf} \le 1 + estiba_2^{bqp} \qquad \forall (i,k) \in N, (j,l) \in N, b, e, f, p \ne q, Seg^{be} = (Seg^{bf} + 1) \tag{75}$$

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrolló un modelo operacional para programación de rutas navieras en el que se combina control de inventarios para múltiples productos y el problema de ruteo de naves. Este trabajo considera los siguientes aspectos novedosos: i) flota heterogénea de naves con consideración explícita de estanques dedicados a tipos de productos (limpios y sucios), ii) incorporación de restricciones relacionadas a compatibilidad de productos transportados en la misma segregación y en estanques contiguos, y iii) el desarrollo de un método heurístico para resolver el problema propuesto. En las pruebas realizadas con instancias de tamaño real, el enfoque propuesto puede resolver problemas que consideran hasta seis naves y doce terminales para un horizonte de planificación de 25 días, en menos de diez minutos de tiempo computacional. Además, los resultados iniciales demuestran reducciones en costos operacionales variables de el casi un 10% y reducciones importantes en las penalidades por quiebres de inventario mínimos con respecto a planes realizados manualmente por personal experimentado en programación de naves.

La formulación propuesta puede extenderse incorporando metaheurísticas para resolver conjuntamente las Etapas II y III del método propuesto. Así como para re-optimizar simultáneamente la ruta de más de una nave. Una extensión más ambiciosa considera incorporar incertidumbre tanto en los tiempos de viaje y servicio, así como en los consumos.

## AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto Fondecyt-Iniciación 2007 No. 11070218, y el proyecto anillos tecnológicos ACT-32 "Real Time Intelligent Control for Integrated Transit Systems".

## REFERENCIAS

Christiansen, M., K. Fagerholt, D. Ronen (2004) “Ship routing and scheduling: Status and perspectives”, **Transportation Science** 38(1) pp. 1–18.

Christiansen, M., K. Fagerholt, Ø. Haugen, E. H. Lund (2006) “Complex ship routing and scheduling”, presented at **Odysseus, Third International Workshop on Freight Transportation and Logistics**. Altea, España, Mayo 23-26, 2006.

Hwang, S. J. (2005) “Inventory constrained maritime routing and scheduling for multi-commodty liquid bulk”, **PhD Dissertation, Georgia Institute of Technology**, Atlanta, GA, EE.UU.

Psaraftis, H.N. (1999) “Foreword to focused issue on maritime transportation”, **Transportation Science** 33 (1), pp.1-2.