

Aproximación para la Mejora Local 2-p-opt del Problema del Vendedor Viajero Probabilístico¹

Alejandro Lamas V.
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Pontificia Universidad Católica de Chile
alamas@puc.cl

Pablo Miranda G.
Escuela de Ingeniería Industrial
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
pablo.miranda@ucv.cl

Vladimir Marianov K.
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Pontificia Universidad Católica de Chile
marianov@ing.puc.cl

RESUMEN

Esta investigación propone un enfoque aproximado para evaluar los ahorros asociados a cada intercambio de la mejora local de la heurística 2-opt aplicada al Problema del Vendedor Viajero Probabilístico, donde los nodos que conforman el problema presentan una probabilidad homogénea de demanda. La aproximación de los ahorros considera un subconjunto del total de términos necesarios para su evaluación exacta. Las soluciones obtenidas al utilizar el enfoque aproximado en la heurística 2-opt presentan errores pequeños en comparación a las soluciones obtenidas por medio de la evaluación exacta. Además, se concluye que el número de términos requeridos para que la heurística alcance un determinado nivel de error es asintóticamente independiente del número de nodos que conforman la instancia del problema, reduciendo la complejidad de la heurística.

Palabras Claves: Problema del Vendedor Viajero Probabilístico, 2-p-opt, Optimización a priori.

ABSTRACT

This research propose an approach to approximately evaluate cost savings for each local search of the 2-opt heuristics applied to the Probabilistic Traveling Salesman Problem with homogeneous demand point probabilities. The savings are approximated considering a subset of the terms needed for an exact evaluation. It is concluded that the number of terms required to reach an expected heuristic performance level is asymptotically independent of the number of demand points. This approach improves heuristic complexity.

Keywords: Probabilistic Traveling Salesman Problem, 2-p-opt, A priori optimization.

1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES GENERALES

El Problema del Vendedor Viajero o Traveling Salesman Problem (TSP), uno de los problemas más conocidos en el área de la optimización combinatorial, consiste en definir una secuencia de visitas para un conjunto de clientes, con el menor costo o longitud posible. El Problema del Vendedor Viajero Probabilístico o Probabilistic Traveling Salesman Problem (PTSP), el cual representa una generalización del TSP, establece que sólo un subconjunto del total de clientes existentes debe ser visitado sincrónicamente en un período. Este subconjunto es desconocido inicialmente, pues los requerimientos de visita de los clientes poseen un comportamiento estocástico. Específicamente, cada cliente tiene asociada una probabilidad de visita, generando diferentes realizaciones del problema. Así, una realización se define como un subconjunto del total de clientes considerados, que deben ser visitados en el mismo tour. Si se tiene un total de n clientes, el número total de realizaciones posibles del problema es (2^n) .

El PTSP fue presentado en Jaillet (1985) y Jaillet (1988), donde se muestra que la secuencia óptima del TSP no necesariamente entregará la solución óptima del PTSP. Además, se presenta una expresión para el valor esperado del costo de un tour del PTSP. La formulación de este problema asume por definición una resolución basada en el enfoque a priori optimization (Powell, Jaillet and Odoni, 1995), donde el objetivo es encontrar un tour a priori que, incluyendo a todos los clientes existentes, posea el mínimo costo esperado. Se asume que en cada realización del problema los clientes presentes son visitados en el mismo orden estipulado en la secuencia a priori, eliminando la visita a los nodos ausentes.

La obtención de la solución óptima al PTSP es intensiva en el consumo de recursos computacionales, considerando que este problema es una extensión al TSP. Cabe señalar que sólo la evaluación de una secuencia factible en el PTSP implica la consideración de una gran cantidad de secuencias del tipo TSP. Por otra parte el PTSP pertenece a la familia de problemas Probabilistic Combinatorial Optimization Problem (Bertsimas, 1988), los que a su vez pertenecen a la categoría de problemas NP-Completo (Bertsimas, Jaillet and Odoni, 1990; Powell, et al. 1995). En consecuencia, el PTSP también pertenece a la clase NP-Completo.

Los enfoques de resolución para este problema han consistido principalmente en métodos heurísticos. No obstante, Laporte, Louveaux and Mercure (1994) presentan un algoritmo óptimo, siendo aplicable sólo a instancias pequeñas del PTSP

¹ Esta investigación ha sido financiada por el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, a través del proyecto FONDECYT 1060945.

(hasta 50 nodos). Bertsimas (1988) y Bertsimas (1993) presenta algoritmos de búsqueda local para problemas de optimización combinatorial bajo incertidumbre, donde destacan los enfoques 2-p-opt y 1-p-shift, basados en las heurísticas 2-opt y 1-shift aplicadas al TSP (Lin, 1965). Estos métodos consisten en mejorar iterativamente la secuencia de visita, mediante el intercambio de algunos arcos incluidos en ella, por otros no incluidos, en la medida que se disminuya el costo o longitud esperada. La complejidad de las heurísticas 2-p-opt y 1-p-shift es $O(n^4)$. Estos métodos fueron modificados por Bianchi, Knowles and Bowler (2005) y corregidos por Bianchi and Campbell (2007). En este último trabajo se propone un enfoque recursivo para el cálculo de la mejora de un movimiento 2-p-opt, con una complejidad $O(n^2)$, en el caso de probabilidades de aparición homogénea. Tang and Miller-Hooks (2005) utilizan una aproximación para la heurística 2-p-opt, considerando un número reducido de términos a evaluar en una mejora del tipo 2-p-opt, aplicado a instancias de 50, 75 y 100 nodos. Además, Campbell (2005) propone un método de agregación de clientes para obtener una buena aproximación al PTSP cuando el número de clientes es muy grande.

El objetivo central de esta investigación consiste en desarrollar un enfoque asintótico que permita aproximar significativamente la bondad o conveniencia de un movimiento 2-p-opt, sólo con un subconjunto del total de términos que componen la respectiva evaluación exacta. Lo anterior, sin afectar significativamente la calidad de la solución obtenida con el

$$E[L(\tau)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n d_{ij} p_i p_j \prod_{k=i+1}^{j-1} q_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij} p_i p_j \prod_{k=i+1}^n q_k \prod_{l=1}^{j-1} q_l \quad (1)$$

donde:

i, j : Índices de nodos.

d_{ij} : Costo o distancia de viajar desde el nodo i al nodo j .

p_i : Probabilidad de aparición del nodo i en una realización del problema.

q_i : Probabilidad que el nodo i no aparezca en una realización del problema, lo que corresponde a $(1-p_i)$.

En la expresión (1), el término $p_i \cdot p_j \cdot \prod_{k=i+1}^{j-1} q_k$ representa la probabilidad que se realice un viaje entre i y j en alguna de las realizaciones del problema, pues $p_i p_j$ es la probabilidad que i y j estén presentes simultáneamente y $\prod_{k=i+1}^{j-1} q_k$ es la probabilidad que todos los nodos entre i y j no lo estén. Luego, el aporte al valor esperado del costo del tour que hace el arco que une los nodos i y j es $d_{ij} \cdot p_i \cdot p_j \cdot \prod_{k=i+1}^{j-1} q_k$.

Análogamente, el término $d_{ij} \cdot p_i \cdot p_j \cdot \prod_{k=i+1}^n q_k \cdot \prod_{l=1}^{j-1} q_l$ está asociado al viaje de retorno que se hace desde el último nodo visitado, i , hasta el nodo donde se inició el tour, j . La probabilidad que i sea el último nodo visitado en alguna de las realizaciones del problema es $\prod_{k=i+1}^n q_k$ y la probabilidad que j sea el nodo inicial

es $\prod_{l=1}^{j-1} q_l$. El cálculo de $E[L(\tau)]$ según la expresión (1), tiene una complejidad de $O(n^2)$ como lo presenta Jaillet (1988).

método 2-p-opt, asumiendo probabilidades de aparición homogéneas. En este trabajo se asegura analíticamente una precisión de las aproximaciones de los ahorros, independiente del tamaño del problema, lo que implica una reducción en la complejidad en la estimación de la conveniencia de los movimientos, comparado con el cálculo exacto de dichos ahorros, pasando de una complejidad $O(n^2)$ a $O(1)$.

2. VALOR ESPERADO DE LOS COSTOS DE UN TOUR EN EL PTSP

El valor esperado de los costos de un tour en el PTSP debe considerar cada una de las realizaciones posibles, producto de la presencia o no de cada uno de los clientes o nodos, los que poseen una determinada probabilidad de requerir una visita. Luego, el valor esperado del costo de un tour cualquiera podrá obtenerse estimando el costo de cada una de las realizaciones que componen el problema. De acuerdo a Jaillet (1988), esto implica una complejidad $O(n2^n)$ para el caso de n nodos, siendo prohibitivo para instancias con un gran número de nodos.

Sin pérdida de generalidad, se supone que en la secuencia *a priori* (τ) los nodos son visitados en orden creciente de numeración, es decir, $\tau = 1, 2, 3, \dots, n$. Luego, el valor esperado de los costos asociados a esta secuencia de visita, $E[L(\tau)]$, puede ser obtenido por (Jaillet, 1985):

3. MEJORA LOCAL 2-P-OPT

La heurística 2-p-opt ha sido una de las más investigadas para su aplicación en el PTSP, y esencialmente realiza el mismo procedimiento que la heurística 2-opt del TSP, analizando mejoras al intercambiar dos pares de arcos de la secuencia en el costo esperado. La diferencia en el PTSP radica en la complejidad del cómputo del ahorro provisto por un movimiento, pues se debe considerar todas las realizaciones existentes con su probabilidad de ocurrencia.

Si sólo se considera realizaciones donde están presentes los nodos directamente involucrados en el intercambio (I, J, K, L), cuya probabilidad de ocurrencia es $p_i \cdot p_j \cdot p_k \cdot p_l$, el ahorro que entregan dichas realizaciones como consecuencia del intercambio será idéntico si se considerará un movimiento 2-opt, es decir, $\Delta_{I,J,K,L}^{TSP} = [d(I, K) + d(J, L)] - [d(I, J) + d(K, L)]$.

No obstante, por la naturaleza del problema, los nodos involucrados directamente en un intercambio no estarán presentes necesariamente en todas las realizaciones del problema. De este modo, el ahorro de un movimiento 2-opt no representa el ahorro total esperado producto de un intercambio 2-p-opt.

Un enfoque para calcular el ahorro de cada movimiento 2-p-opt es recalcular el valor esperado del tour *a priori*, como proponen Bertsimas (1988), Bianchi, et al. (2005) y Bianchi and Campbell (2007).

A partir del tour τ , se define un nuevo tour $\tau^* = 1, \dots, I-1, I, K, K-1, \dots, J+1, J, L, L+1, \dots, n$, el que se obtiene al revertir el orden de visita entre J y K de la secuencia *a priori*, producto del intercambio 2-p-opt de los arcos (I, J) y (K, L). Luego, el ahorro esperado provisto por este intercambio 2-p-opt, $E[\Delta_{I,J,K,L}^{PTSP}]$, está definido por la siguiente expresión:

$$E[\Delta_{I,J,K,L}^{PTSP}] = E[L(\tau^*)] - E[L(\tau)] \quad (2)$$

Similar a lo que sucede en la heurística 2-opt del TSP, un intercambio del tipo 2-p-opt proporcionará un ahorro en el PTSP si:

$$E[\Delta_{I,J,K,L}^{PTSP}] < 0 \quad (3)$$

La estimación de $E[\Delta_{I,J,K,L}^{PTSP}]$ por medio de la diferencia de los costos esperados entre el tour original y el modificado para un problema con n nodos implica una complejidad de $O(n^4)$ para cada movimiento 2-p-opt existente. De este modo, los análisis presentados en la literatura se han enfocado en desarrollar expresiones alternativas a (2), con el fin de reducir su complejidad.

$$E[\Delta_{I,J,K,L}^{PTSP}] =$$

$$\sum_{i=0}^{I'-L'-1} \left[p_{I'-i} \cdot \prod_{x=0}^{i-1} q_{I'-x} \cdot \sum_{j=0}^{K'-J'-1} \left[p_{J'+j} \cdot \prod_{y=0}^{j-1} q_{J'+y} \cdot \sum_{k=0}^{K'-j-1} \left[p_{K'-k} \cdot \prod_{z=0}^{k-1} q_{K'-z} \cdot \sum_{l=0}^{I'-L'-i} \left[p_{L'+l} \cdot \prod_{w=0}^{l-1} q_{L'+w} \cdot \Delta_{I'-i,J'+j,K'-k,L'+l}^{TSP} \right] \right] \right] \right] \quad (5)$$

La expresión (5) corresponde a la suma de los respectivos aportes Δ^{TSP} pero, sólo para aquellas realizaciones que presentan un ahorro no nulo. Es decir, se descartan todas las realizaciones donde no estén presentes al menos dos nodos entre L' e I' y entre J' y K' (inclusive), puesto que en caso contrario el ahorro es nulo. En adelante, se denominará $R_{I',J',K',L'}$ al conjunto de realizaciones consideradas en (5). En la Figura 1-(a) se presentan un ejemplo de secuencias de visita *a priori* τ y τ' . En la Figura 1-(b) se puede apreciar el ahorro, al intercambiar los arcos (I', J') y (K', L') , provisto para una realización del problema.

En este sentido, este trabajo considera una secuencia de visita *a priori* $\tau' = J, J+1, \dots, K-1, K, L, L+1, \dots, n, 1, \dots, I-1, I$. Esta secuencia es una rotación de la secuencia original τ , de modo que, si S y S' representan la posición de un nodo en τ y τ' , respectivamente, las posiciones de visita en τ' , se pueden obtener por medio de la siguiente expresión:

$$S' = \begin{cases} S - I & S = j, \dots, n \\ n + S - I & S = 1, \dots, i \end{cases} \quad (4)$$

A partir de esta transformación, el ahorro esperado provisto por el intercambio 2-p-opt de los arcos (I, J) y (K, L) puede estimarse por medio de la siguiente expresión:

4. ORDEN DE MAGNITUD PROBABILÍSTICA DE UNA REALIZACIÓN

En este trabajo se pretende evaluar la conveniencia de un movimiento considerando sólo a un subconjunto de términos de la expresión (5), por lo que es necesario analizar el comportamiento de cada uno de los sumandos en esta expresión, donde cada término está asociado a diferentes realizaciones del problema.

Cada sumando de la ecuación (5), en adelante definido como

$A_{I',J',K',L'}(x, y, z, w)$, corresponde al aporte provisto por un subconjunto de realizaciones $R_{I',J',K',L'}(x, y, z, w) \subseteq R_{I',J',K',L'}$, dentro del ahorro total, donde los nodos x, y, z y w están presentes, pero aquellos ubicados entre los pares de nodos $(x+1, I')$, $(J', y-1)$, $(z+1, K')$ y $(L', w-1)$ no lo están, como se aprecia en la Figura 2. A partir de lo anterior, cada sumando en (5), se puede expresar de la siguiente forma:

$$A_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l) = p_{I'-i} \cdot \left(\prod_{x=0}^{i-1} q_{I'-x} \right) \cdot p_{J'+j} \cdot \left(\prod_{y=0}^{j-1} q_{J'+y} \right) \cdot p_{K'-k} \cdot \left(\prod_{z=0}^{k-1} q_{K'-z} \right) \cdot p_{L'+l} \cdot \left(\prod_{w=0}^{l-1} q_{L'+w} \right) \cdot \Delta_{I'-i,J'+j,K'-k,L'+l}^{TSP} \quad (6)$$

Luego, reemplazando (6) en la ecuación (5), se obtiene:

$$E[\Delta_{I',J',K',L'}^{PTSP}] = \sum_{i=0}^{I'-L'-1} \sum_{j=0}^{K'-J'-1} \sum_{k=0}^{K'-j-1} \sum_{l=0}^{I'-i-1} [A_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l)] \quad (7)$$

De acuerdo a la ecuación (6), cada uno de los subconjuntos de realizaciones $R_{I',J',K',L'}(x, y, z, w)$ posee una probabilidad de ocurrencia $\bar{p}_{I',J',K',L'}(x, y, z, w)$, de modo que $A_{I',J',K',L'}(x, y, z, w)$ puede ser obtenido según:

$$A_{I',J',K',L'}(x, y, z, w) = \bar{p}_{I',J',K',L'}(x, y, z, w) \cdot \Delta_{x,y,z,w}^{TSP} \quad (8)$$

El valor de $\bar{p}_{I',J',K',L'}(x, y, z, w)$ puede obtenerse en forma recursiva a partir de $\bar{p}_{I',J',K',L'}(I', J', K', L') = p_{I'} \cdot p_{J'} \cdot p_{K'} \cdot p_{L'}$, según:

$$\bar{p}_{I',J',K',L'}(x-1, y, z, w) = \bar{p}_{I',J',K',L'}(x, y, z, w) \cdot \left(\frac{q_x \cdot p_{x-1}}{p_x} \right); \quad \bar{p}_{I',J',K',L'}(x, y+1, z, w) = \bar{p}_{I',J',K',L'}(x, y, z, w) \cdot \left(\frac{q_y \cdot p_{y+1}}{p_y} \right) \quad (9)$$

$$\bar{p}_{I',J',K',L'}(x, y, z-1, w) = \bar{p}_{I',J',K',L'}(x, y, z, w) \cdot \left(\frac{q_z \cdot p_{z-1}}{p_z} \right); \quad \bar{p}_{I',J',K',L'}(x, y, z, w+1) = \bar{p}_{I',J',K',L'}(x, y, z, w) \cdot \left(\frac{q_w \cdot p_{w+1}}{p_w} \right)$$

De este modo, a partir de las expresiones (7), (8) y (9), es posible encontrar el ahorro provisto por un intercambio 2-p-opt con una complejidad $O(n^4)$, puesto que el cálculo de cada término $A_{I',J',K',L'}(x, y, z, w)$ de la ecuación (7) es $O(1)$.

Si se considera que los nodos con probabilidad homogénea de aparición, p , y consecuentemente una probabilidad de ausencia q , la probabilidad asociada a $\bar{p}_{I',J',K',L'}(I', J', K', L')$ es p^4 . De esta forma la probabilidad asociada a un subconjunto de

realizaciones $R_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l)$ está dada por la siguiente expresión:

$$\bar{p}_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l) = p^4 \cdot q^{i+j+k+l} \quad (10)$$

En la expresión (10), $i+j+k+l$ representa el número de nodos ubicados entre los pares $(I'-i, J'+j)$ y $(K'-k, L'+l)$, y que están ausentes en el subconjunto de realizaciones $R_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l)$.

El valor del exponente de q en la expresión (10), $i+j+k+l$, tiene directa relación con el orden de magnitud de la probabilidad de $\bar{p}_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l)$. En adelante, se define a $i+j+k+l$ como el orden de un subconjunto de realizaciones $R_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l)$. Considerando la definición anterior, el mayor orden que puede tener un conjunto

$$\Pr \left[\left(r \in R_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l) \wedge i+j+k+l = T \right) / r \in R_{I',J',K',L'} \right] \quad (11)$$

Luego, $P_{I',J',K',L'}(T)$ puede ser escrito de la siguiente forma:

$$P_{I',J',K',L'}(T) = \frac{\sum_{i,j,k,l | i+j+k+l=T}^{n-4} \left[\bar{p}_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l) \right]}{\sum_{i,j,k,l | i+j+k+l \leq n-4}^{n-4} \left[\bar{p}_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l) \right]} \quad (12)$$

A partir de la expresión (12), se define $AP_{I',J',K',L'}(T)$ como el peso probabilístico acumulado hasta un orden T , es decir, la probabilidad que alguna de las realizaciones consideradas en el ahorro de un intercambio 2-p-opt de los arcos (I', J') y (K', L') , posea orden menor o igual a T . Esto se expresa en la siguiente ecuación:

$$AP_{I',J',K',L'}(T) = \sum_{t=0}^T P_{I',J',K',L'}(t) \quad (13)$$

Conforme a la ecuación (13), se estimó empíricamente el valor promedio de $AP_{I',J',K',L'}(T)$ asociado a cada uno de los movimientos 2-p-opt, para instancias del PTSP de hasta 75 nodos y distintas probabilidades homogéneas de aparición. Los resultados obtenidos dan cuenta de una clara tendencia en el valor de $AP_{I',J',K',L'}(T)$ en la medida que el número de nodos aumenta, como se aprecia en la Figura 3, donde se presentan los resultados promedios obtenidos para el caso de probabilidad de aparición de los nodos igual a 0,3.

Con el fin de estimar el ahorro provisto por las realizaciones consideradas en el movimiento 2-p-opt de los arcos (I', J') y (K', L') , se analiza el comportamiento de la probabilidad de ocurrencia de un conjunto de realizaciones, $P_{I',J',K',L'}(T)$, para instancias con probabilidades de aparición homogéneas, en el límite cuando el número de nodos tiende a ∞ .

Para determinar el comportamiento asintótico de $AP_{I',J',K',L'}(T)$, presentado en la Figura 3, se estima el número máximo de subconjuntos de realizaciones que tienen un determinado orden T , cuyo valor es $\binom{T+3}{T}$. A partir de esto, la ecuación (12) puede escribirse de la siguiente forma:

de realizaciones en es $n-4$, pues naturalmente un conjunto de realizaciones debe tener al menos 4 nodos presentes, para que $A_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l)$ sea distinto de 0.

5. PROBABILIDAD ASOCIADA A UN SUBCONJUNTO DE REALIZACIONES

Con el fin de complementar el análisis y cuantificar el aporte potencial que provee cada uno de los términos sumandos de (5) en el ahorro total producto de un movimiento 2-p-opt, se define $P_{I',J',K',L'}(T)$ como la probabilidad que una realización $r \in R_{I',J',K',L'}$, pertenezca a algún subconjunto de orden T , lo que está definido por la siguiente expresión:

$$P_{I',J',K',L'}(T) = \frac{\binom{T+3}{T} \cdot p^4 \cdot q^T}{\sum_{t=0}^{n-4} \binom{t+3}{t} \cdot p^4 \cdot q^t} \quad (14)$$

Cuando el número de nodos tiende a ∞ , $P_{I',J',K',L'}(T)$ puede expresarse por la ecuación (15), la cual depende sólo de p y T , y no del número de nodos que conforman la instancia.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{I',J',K',L'}(T) = \frac{(T+3) \cdot (T+2) \cdot (T+1) \cdot q^T \cdot p^4}{6} \quad (15)$$

A partir de las ecuaciones (13) y (15) se calcula el valor asintótico de $AP_{I',J',K',L'}(T)$, para cualquier orden T y distintas probabilidades homogéneas p . Los valores obtenidos muestran una gran similitud con la tendencia manifiesta de los valores empíricos para las instancias analizadas, lo que se puede apreciar en la Figura 3.

6. BONDAD DE UN MOVIMIENTO 2-P-OPT SEGÚN ORDEN DE REALIZACIONES

La bondad de un movimiento 2-p-opt es un indicador de la conveniencia de éste, el cual ha sido tradicionalmente calculado en función del ahorro exacto en los costos de una secuencia dada. A diferencia de lo anterior, se propone utilizar un indicador que no involucre el cálculo exacto de los ahorros involucrados, pero sin afectar significativamente la calidad de las soluciones proporcionadas. En consecuencia, se propone el indicador $B_{I',J',K',L'}(T)$ de la ecuación (16), como la bondad del intercambio 2-p-opt de los arcos (I', J') y (K', L') , considerando sólo aquellos términos cuyo orden no supere el valor T .

$$B_{I',J',K',L'}(T) = \sum_{i,j,k,l | i+j+k+l \leq T} A_{I',J',K',L'}(I'-i, J'+j, K'-k, L'+l) \quad (16)$$

Así, en forma análoga al criterio definido por la expresión (3), se establece el siguiente criterio alternativo para aceptar un movimiento 2-p-opt:

$$B_{T,J,K,L}(T) < 0 \quad (17)$$

La calidad de las soluciones entregadas por la heurística 2-p-opt al utilizar a la expresión (17) como criterio de aceptación dependerá del orden T considerado. La obtención de este orden y la efectividad de (17) como criterio de aceptación se basan en la comparación de los resultados empíricos entregados por la heurística al utilizar este criterio, con los entregados por el cálculo exacto del ahorro, además del comportamiento asintótico de la probabilidad de ocurrencia de los conjuntos de realizaciones con un determinado orden T .

6.1 Resultados Empíricos para la Bondad de un Movimiento

Se realizó un análisis de la bondad provista por la mejora 2-p-opt para diversas instancias del problema, con nodos distribuidos en forma aleatoria en un área de 100×100 . Se analizó 450 instancias que corresponden a redes de hasta 75 nodos, donde éstos poseen una probabilidad homogénea de visita entre 0,1 y 0,9. Se consideró como solución *a priori* inicial del problema, a aquella obtenida por la heurística del vecino más cercano para el TSP. A partir de esta secuencia se comparó el error en las soluciones entregadas por la heurística 2-p-opt, al considerar a la expresión (3) como criterio de aceptación (es decir, el cálculo exacto del ahorro), y las soluciones al utilizar el criterio (17), para distintos valores de T . Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 4, donde se muestra el orden máximo T que debe ser considerado en la expresión (17), para obtener una solución con un error de 0%, 2%, 5% y 10% respecto de la utilización de la expresión (3). Esta figura considera instancias con probabilidades de aparición 0,5.

En la Figura 5, se presenta un análisis similar al presentado en la Figura 4, pero considerando el valor empírico de $AP_{T,J,K,L}(T)$ requerido para obtener un determinado nivel de error. En la Tabla 1 se presenta el valor empírico de $AP_{T,J,K,L}(T)$ que representan las realizaciones con orden menor o igual a T , de modo que éste orden, al ser considerado en la expresión (16) como criterio de conveniencia, genere un error en las soluciones no superior al 2% y 5%.

6.2 Cota para Evaluar la Bondad de un Movimiento 2-p-opt

Dado que $q \in [0, 1]$, la probabilidad asociada a un subconjunto de realizaciones, como se aprecia en la ecuación (10), disminuye con su orden. De este modo, la contribución que proveen al ahorro total esperado por un movimiento 2-p-opt los subconjuntos de realizaciones con orden elevado será potencialmente despreciable en relación a aquellos subconjuntos con un orden pequeño. Así, se espera que la consideración de subconjuntos de realizaciones con orden bajo represente un indicador eficiente y efectivo para la bondad de un movimiento 2-p-opt, sin necesidad de computar el ahorro en forma exacta.

En consecuencia, se estableció una relación empírica entre el orden T^* a considerar en la expresión (16) y el error potencial incurrido, respecto de la utilización de la expresión (3). Con los resultados de la Figura 3 y la Tabla 1, es posible determinar el mínimo orden T^* que debe ser considerado, para obtener errores potenciales cercanos al 2%, como se aprecia en la Tabla 2.

6.3 Aplicación y Validación de Cotas

Con las cotas definidas en la Tabla 2, se aplicó la heurística 2-p-opt, considerando como criterio para la bondad de un movimiento a las expresiones (17) y (3), a 50 instancias del problema con 100 nodos, distribuidos en un área de 200×200 , con 5 valores distintos de probabilidades.

En la Tabla 3 se presentan los resultados promedio obtenidos al utilizar la heurística 2-p-opt, en su versión exacta y aproximada. Estos resultados evidencian una calidad similar del enfoque aproximado, respecto de aquellas instancias utilizadas previamente para determinar las cotas (i.e. hasta 75 nodos). En promedio, las instancias con probabilidades mayores a 0,1 mostraron un error inferior al 2% en el ahorro total obtenido, respecto de la utilización del criterio (3). Incluso, en algunas de las instancias con probabilidades entre 0,5 y 0,9, el ahorro total provisto con el enfoque aproximado resultó mayor.

En la Figura 6 se presenta el detalle de los errores en los ahorros obtenidos al aplicar la heurística 2-p-opt a las instancias de 100 nodos previamente descritas. Se puede apreciar, que para instancias con probabilidad 0,1; un error promedio de 5,6%, lo cual está claramente determinado por el resultado negativo de dos instancias particulares del problema. El resto de las instancias analizadas para esta probabilidad, mantienen un comportamiento dentro de los rangos esperados.

Desde el punto de vista del largo esperado del tour entregado por la heurística 2-p-opt, los resultados obtenidos al aproximar la bondad de un beneficio son muy similares a los obtenidos al computar exactamente esta bondad. El peor de los casos lo representa la probabilidad 0,1; donde el error promedio no supera el 1,2%. Esta calidad de las soluciones se debe a la exigencia establecida para definir las cotas, las cuales consideran un 2% de error en el ahorro esperado y no en el largo total esperado.

Los resultados entregados para la validación de las cotas definidas en la Tabla 2 ayudan a ratificar la validez de las hipótesis planteadas en este trabajo. Así, la utilización del criterio establecido en la expresión (17), que sólo considera algunos términos de acuerdo a su orden, es un buen criterio para la estimación de la bondad de un movimiento. Además, las cotas definidas para el orden que deben poseer los términos incluidos en el cálculo de la bondad de un movimiento, son invariables con el número de nodos del problema, y sólo dependen de la probabilidad homogénea de aparición de éstos. De este modo, la implementación de la heurística 2-p-opt utilizando como criterio de conveniencia de un movimiento a la expresión (17), tiene una complejidad $O(n^2)$. En primer lugar, se debe analizar cada uno de los posibles movimientos, lo que tiene una complejidad $O(n^2)$ y luego, se analiza la conveniencia de un movimiento por medio de la expresión (17), lo que tiene una complejidad $O(1)$, pues el número de términos (subconjunto de realizaciones) a analizar es una constante que no depende del número de nodos.

7. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se propone una heurística de baja complejidad para la resolución del PTSP, cuya calidad de soluciones no difiera significativamente respecto a las entregadas por heurísticas existentes en la literatura. Para ello, se desarrolla una simplificación de un algoritmo de mejora local del tipo 2-p-opt, obteniendo un indicador de la conveniencia de este tipo de movimiento, sin necesidad de computar el ahorro de manera exacta, lo que implica una disminución en la complejidad de la heurística, sin afectar ostensiblemente la calidad de las soluciones.

En este trabajo se establece que el número de términos necesarios, para aproximar la bondad de un movimiento con una precisión preestablecida, posee un comportamiento asintótico y no aumenta con el número de nodos del problema. Esto implica una fuerte reducción en la complejidad de la heurística respecto de la versión 2-p-opt original. El tiempo total necesario para realizar la revisión de los posibles intercambios del tipo 2-p-opt posee una complejidad total $O(n^2)$, comparado con una complejidad $O(n^4)$, de la heurística 2-p-opt original.

A partir de un conjunto de pruebas empíricas, se determina una relación similar entre el error esperado para la solución entregada, respecto de la obtenida con la heurística 2-p-opt original, y el número de términos necesarios para ello. Nuevamente, esta relación no depende del número de nodos que conforman el problema.

Desde el punto de vista de investigación futura, se pueden destacar algunas líneas de interés:

- Se consideró como secuencia de entrada para la mejora local 2-p-opt, a aquel tour definido por la heurística de construcción del vecino más cercano, asociado al TSP. Esto, puede influir en la definición de las cotas para la bondad de un movimiento, en especial, para instancias donde la probabilidad de aparición es baja. Dado lo anterior, es de interés comprobar, o modificar, las cotas planteadas al utilizar otra heurística de construcción.
- Un análisis similar al presentado en este trabajo puede encontrar un indicador de la conveniencia de un movimiento 2-p-opt para probabilidades heterogéneas, a partir del comportamiento que tienen los términos que conforman el ahorro exacto de un movimiento. De este modo, se podría garantizar la efectividad de la heurística para cualquier instancia del PTSP.
- Encontrar cotas similares a las obtenidas en este trabajo, para otras heurísticas de mejoras locales aplicables al PTSP, como por ejemplo la heurística 1-p-shift.
- Comparar los costos del PTSP con los proporcionados por distintas estructuras de costos de ruteo, con el objeto de determinar posibles relaciones funcionales entre ellas.
- Implementar la estructura de costos PTSP en la cuantificación de los costos de ruteo en el marco del Diseño de Redes de Distribución (DRD). Con esta implementación se podrá comparar las soluciones del DRD al utilizar una estructura PTSP respecto a la utilización de otro tipo de estructuras.

REFERENCIAS

- Bertsimas, D. J. (1988) Probabilistic Combinatorial Optimization Problems. **Operations Research Center**.
- Bertsimas, D. J. (1993) Further Results on the Probabilistic Traveling Salesman Problem. **European Journal of Operational Research**, 65, 68-95.
- Bertsimas, D. J., Jaillet, P.y Odoni, A. (1990) A Priori Optimization. **Operations Research**, 38, 6, 1019-1033.
- Bianchi, L.y Campbell, A. M. (2007) Extension of the 2-p-opt and 1-shift Algorithms to the Heterogeneous Probabilistic Traveling Salesman Problem. **European Journal of Operational Research**, 176, 131-144.
- Bianchi, L., Knowles, J.y Bowler, N. (2005) Local Search for the Probabilistic Traveling Salesman Problem: Correction to the 2-p-opt and 1-shift Algorithms. **European Journal of Operational Research**, 162, 206-219.
- Campbell, A. M. (2005) Aggregation for the probabilistic traveling salesman problem. **Computers and Operations Research**.
- Jaillet, P. (1985) The Probabilistic Traveling Salesman Problems. **Operations Research Center**.
- Jaillet, P. (1988) A Priori Solution of a Traveling Salesman Problem in which a Random Subset of the Customers are Visited. **Operations Research**, 36(6), 929-36.
- Laporte, G., Louveaux, F.y Mercure, H. (1994) An exact solution for the a priori optimization of the probabilistic traveling salesman problem. **Operations Research**, 42, 3, 543-549.
- Lin, S. (1965) Computer solutions of the traveling salesman problem. **Bell System Tech. J.**, 2245-2269.
- Powell, W. B., Jaillet, P.y Odoni, A. (1995) Stochastic and Dynamic Networks and Routing. **Elsevier Science B. V.**
- Tang, H.y Miller-Hooks, E. (2005) Aproximate Procedures for the Probabilistic Traveling Salesman Problem. Transportation Research Record (TRR), **Journal of the Transportation Research Board**, 1882, 27-36.

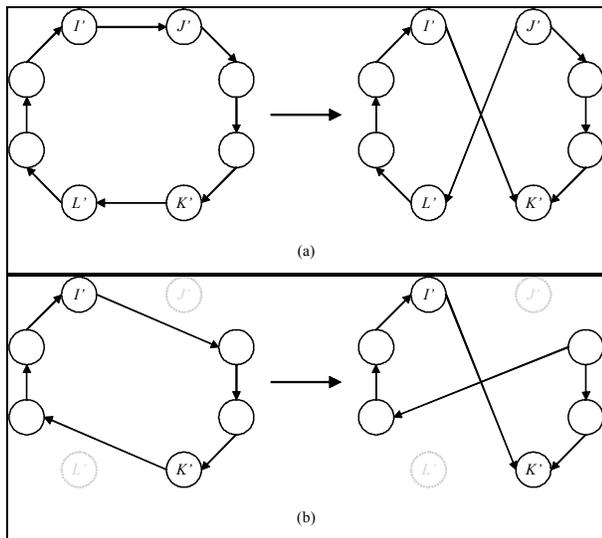


FIGURA 1: Movimiento 2-p-opt

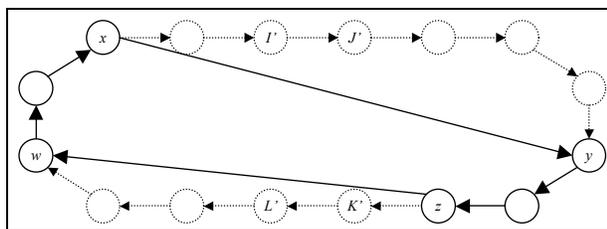


FIGURA 2: Realización perteneciente a $R_{I',J',K',L'}(x, y, z, w)$

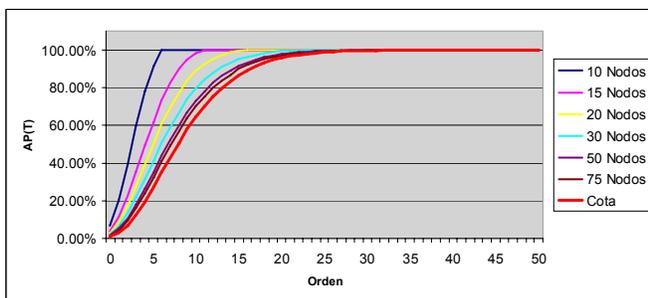


FIGURA 3: $AP_{I',J',K',L'}(T)$ asintótico y empírico. Probabilidad 0,3.

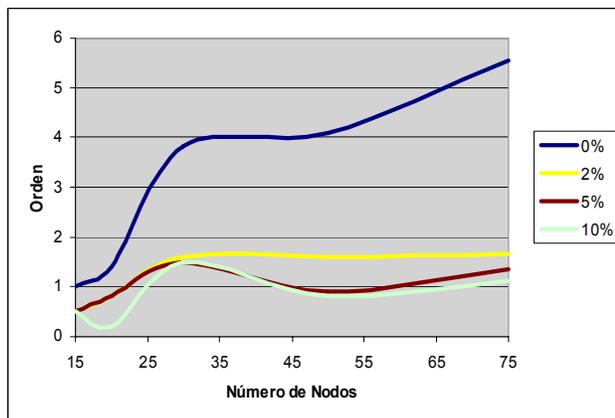


FIGURA 4: Orden empírico máximo incluido en la bondad de un movimiento. Probabilidad 0,5

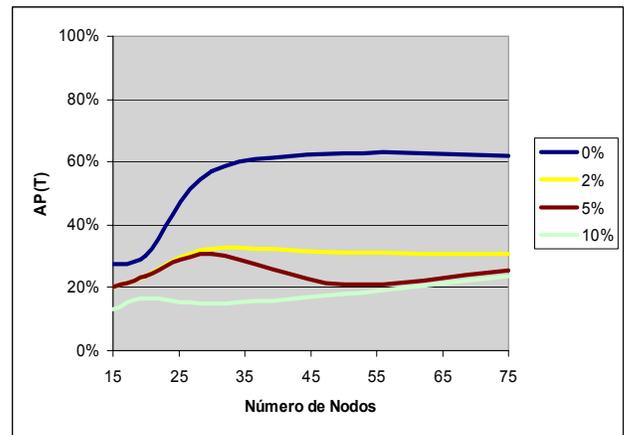


FIGURA 5: $AP_{I',J',K',L'}(T)$ empírico incluido en la bondad de un movimiento. Probabilidad 0,5

TABLA 1: Resultados empíricos para $AP_{I',J',K',L'}(T)$ incluido en la bondad de un movimiento. Errores del 2% y 5%

Probabilidad	$AP(T)$	
	Error = 2%	Error = 5%
0.1	66%	66%
0.2	66%	50%
0.3	60%	50%
0.4	40%	40%
0.5	35%	30%
0.6	40%	30%
0.7	60%	50%
0.8	70%	70%
0.9	80%	80%

TABLA 2: Máximo orden incluido en la bondad de un movimiento, para un error del 2% respecto al ahorro exacto en la heurística 2-p-opt

Probabilidad	$AP(T)$	T^*
0.1	66%	41
0.2	66%	20
0.3	60%	10
0.4	40%	4
0.5	35%	5
0.6	40%	2
0.7	60%	2
0.8	70%	1
0.9	80%	1

TABLA 3: Resultados promedios para la heurística 2-p-opt exacta y aproximada, para instancias del PTSP con 100 nodos

Prob.	Cota	Largo Tour VMC	Ahorro Esperado			Largo Tour Final		
			Acotado	Total	Error	2-p-opt-k	2-p-opt	Error
0.1	41	713.6	205.7	208.8	-5.6%	599.3	592.5	1.2%
0.3	10	1214.6	205.9	209.1	-1.5%	1013.5	1010.5	0.3%
0.5	5	1481.6	208.8	212.0	0.3%	1266.2	1263.1	0.3%
0.7	2	1673.2	210.6	213.9	-1.2%	1439.6	1435.4	0.3%
0.9	1	1825.4	212.1	215.4	0.6%	1573.2	1574.9	-0.1%

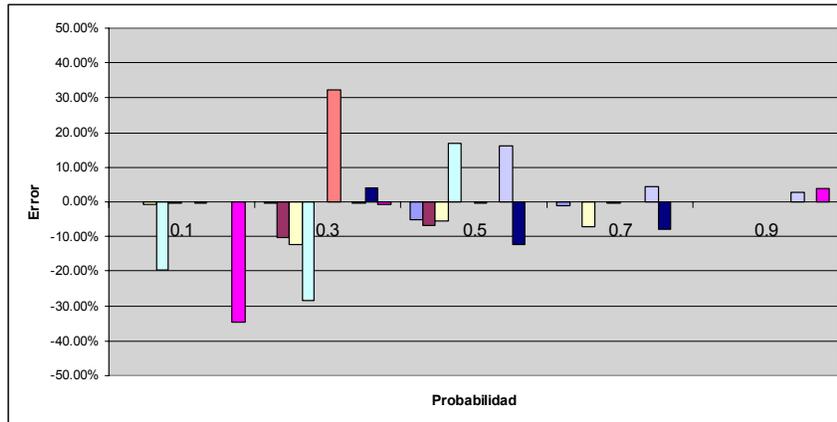


FIGURA 6: Errores en la heurística 2-p-opt al utilizar una aproximación para la bondad de un movimiento, para instancias del PTSP con 100 nodos